



TITLE:

# 大自由度非線形分散波動系における実空間秩序構造 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

横山, 直人

---

CITATION:

横山, 直人. 大自由度非線形分散波動系における実空間秩序構造 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2003, 1311: 52-58

ISSUE DATE:

2003-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42914>

RIGHT:

# 大自由度非線形分散波動系における 実空間秩序構造

京大・理 横山 直人 (Naoto YOKOYAMA)  
Faculty of Science, Kyoto University

## 1 はじめに

自然界には数多くの非線形分散波動系が存在するが、最も身近なものの1つが水面波動系であろう。本研究では、水面波動系のなかで重力を復元力とする無限水深の波を考える。無限水深重力波系は、海洋波浪において最もエネルギーを持った系であり、その性質の解明は応用面からも非常に重要である。

これまでは、大自由度の水面波の方程式を直接数値計算することは非常に困難であったので、水面波のある種のモデルとして自由度を落とした方程式や統計近似の結果得られる方程式の研究が広くなされてきた。前者の方程式の1つが非線形 Schrödinger 方程式であり、後者の1つが Hasselmann 方程式である。海洋波浪を研究する人々の中で Hasselmann 方程式を疑う者は少ないと思われるが Newell らが指摘するように [4], Hasselmann 方程式の土台となる弱乱流理論に適用限界があることは明らかである上に、その適用範囲について十分検証されたとは言い難い。実際、水面波系ではないものの水面波と同様の非線形性、分散性を持ち弱乱流理論を適用可能と思われたある種のモデル方程式系において弱乱流理論では説明のできないスペクトルが得られた [1]。

このようなことから、本研究では無限水深重力波系に関して方程式系としては自由度を落とすことなく、統計近似も用いない決定論的方程式を数値的に解き弱乱流理論の正統性について検証する。また、数値計算で得られた弱乱流理論ではとらえられない実空間における間欠性が、波動場の統計量へ与える影響を考える。

## 2 非線形分散波動系における統計則

3次元無限水深の重力波系は、流体内部はラプラス方程式、流体表面の境界条件はオイラー方程式および流体面連続の式で記述される。波面変動の大きさ  $\eta(\mathbf{x}, t)$ 、表面での速度ポテンシャル  $\phi^S(\mathbf{x}, t)$  をそれぞれフーリエ変換した  $\tilde{\eta}(\mathbf{k}, t)$ 、 $\tilde{\phi}^S(\mathbf{k}, t)$  を用いて

$$b(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2|\mathbf{k}|}} \tilde{\eta}(\mathbf{k}, t) + i \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2\omega(\mathbf{k})}} \tilde{\phi}^S(\mathbf{k}, t) \quad (1)$$

で正準変数  $b(\mathbf{k}, t)$  を定義する. このとき,  $b(\mathbf{k})$  の時間発展は,

$$\frac{\partial b(\mathbf{k})}{\partial t} = -i\omega(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) \quad (2a)$$

$$+ \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) b(\mathbf{k}_1) b(\mathbf{k}_2) \\ + \text{その他 3 波相互作用項} \quad (2b)$$

$$+ \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) b^*(\mathbf{k}_1) b(\mathbf{k}_2) b(\mathbf{k}_3) \\ + \text{その他 4 波相互作用項} \quad (2c)$$

$$+ \text{高次項} \quad (2d)$$

と 2 次元非線形分散波動系として決定論的方程式で表すことができる. 式中の  $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ ,  $U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ , さらに (5) 式中の  $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  等の具体的な表式については Krasitskii[3] を参照されたい. また, 3 次元系から 2 次元系への変形の過程より  $g$  を重力加速度として線形振動数  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$  が与えられる. ここで, 変形過程において, 表面変動の勾配は十分小さいこと, すなわち,

$$|\nabla_{\perp} \eta(\mathbf{x})| \ll 1 \quad (3)$$

が仮定されていることを注意しておく.  $\nabla_{\perp} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$  は水平方向の勾配演算子を表す.

また, 場の変動は十分小さい, すなわち, 任意の波数  $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j, \dots$  に関して

$$|b(\mathbf{k}_i)| \gg |b(\mathbf{k}_j)b(\mathbf{k}_l)| \gg |b(\mathbf{k}_m)b(\mathbf{k}_n)b(\mathbf{k}_p)| \gg \dots \quad (4)$$

と仮定する. この仮定により, (2a-2d) 式右辺においてより低次の項ほど波動場  $b(\mathbf{k}, t)$  の時間発展に大きな寄与を与えるので 5 波相互作用以上の高次項は無視することにする. また, 主たる項が (2a) の線形項であるので波数間相互作用は非常に弱い. このことから, 個々の波はほとんど独立に振動数  $\omega(\mathbf{k})$  を持って運動する.

近似的に  $n(\mathbf{k}) = \langle |b(\mathbf{k})|^2 \rangle = E(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k})$  と定義されるアクション,  $n(\mathbf{k})$ , の時間発展を考える. ここで  $\langle \cdot \rangle$  はアンサンブル平均を表す. 個々の波の位相が完全にランダムとする最も単純な正規的乱雑位相近似を用いるとアクションの時間変化は起こり得ない. そこで, 2 時刻相関をとりこんだ準正規的乱雑位相近似を用いると運動論的方程式,

$$\frac{\partial n(\mathbf{k})}{\partial t} = 4\pi \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3)) \\ \times |T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)|^2 (n(\mathbf{k}_1)n(\mathbf{k}_2)n(\mathbf{k}_3) + n(\mathbf{k})n(\mathbf{k}_2)n(\mathbf{k}_3) \\ - n(\mathbf{k})n(\mathbf{k}_1)n(\mathbf{k}_3) - n(\mathbf{k})n(\mathbf{k}_1)n(\mathbf{k}_2)), \quad (5)$$

が得られる [8]. このように乱雑位相近似が適用できて,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \\ \omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) &= \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3) \end{aligned}$$

をみたす共鳴局面上のみで系全体のエネルギーの輸送を記述できるような系を弱乱流系と呼び, この理論を弱乱流理論と呼ぶ. ただし, 実際には非線形項による  $O(|b|^2)$  程度の振動数ずれが存在するので, 共鳴局面ではなく共鳴殻内でエネルギーの輸送を考えることになる.

エネルギー保存則に対応して, 波動場のエネルギースペクトルが媒質 (水) の密度  $\rho$ , 重力加速度  $g$ , 波数  $k$ , 波数空間におけるエネルギーフラックス  $P$  に依存するとすると, 次元解析を用いて  $E(k) = \rho g k^{-3} f(\frac{Pk^{3/2}}{\rho g^{3/2}})$  と表される. ここで  $f(x)$  は無次元の関数である. 運動論的方程式, (5) 式, より  $P \propto (E(k))^3$  とすると,  $f(x) \propto x^{1/3}$  となり, エネルギースペクトル  $E(k) \propto \rho^{2/3} g^{1/2} P^{1/3} k^{-5/2}$  が得られる. このときアクションスペクトルは

$$n(k) \propto \rho^{2/3} P^{1/3} k^{-3} \quad (6)$$

と書け, エネルギーフラックスは低波数領域から高波数領域に流れる [9]. なお, アクション保存則に対応してアクションフラックス  $Q$  が高波数領域から低波数領域に流れる非平衡定常スペクトルも存在することが知られている. Polnikov[6] は (5) 式を数値的に解くことでこれらの冪則が得られることを示した. また, Onorato ら [5] は非等方スペクトルについて (2a-2d) 式を直接数値計算することでエネルギー保存則に対応する冪則を得た.

### 3 数値計算

本研究は決定論的方程式 (2a-2c) に  $-\nu k^{16} b(\mathbf{k})$  で表される人工的な粘性を付加した 2 次元減衰波動系について数値シミュレーションを行った.  $g$  およびアクションスペクトルのピーク波数が 1 になるように時間, 空間を規格化する. 空間には周期境界条件を課し, 格子点数  $4096 \times 4096$  のフーリエスペクトル法を用いた. また, 時間積分にはルンゲ-クッタ法を用いた. 初期条件は,

$$|b(\mathbf{k}, 0)|^2 = \begin{cases} C, & 0.5 \leq |\mathbf{k}| \leq 1.5 \\ 0, & \text{その他の波数} \end{cases} \quad (7)$$

とし, 定数  $C$  は全エネルギー  $E \sim 5 \times 10^{-3}$  となるように決定する. これは, 平均的な波面の勾配が  $7 \times 10^{-2}$  程度であることを意味する. さらに  $b(\mathbf{k}, 0)$  の位相は  $[0, 2\pi]$  の一様乱数を用いた.

数値計算によって得られたアクションスペクトルを図 1 に示す. 時刻  $t = 1600T_p$  ( $T_p = 2\pi$  はピーク波数の持つ周期) で運動論的方程式から期待される冪

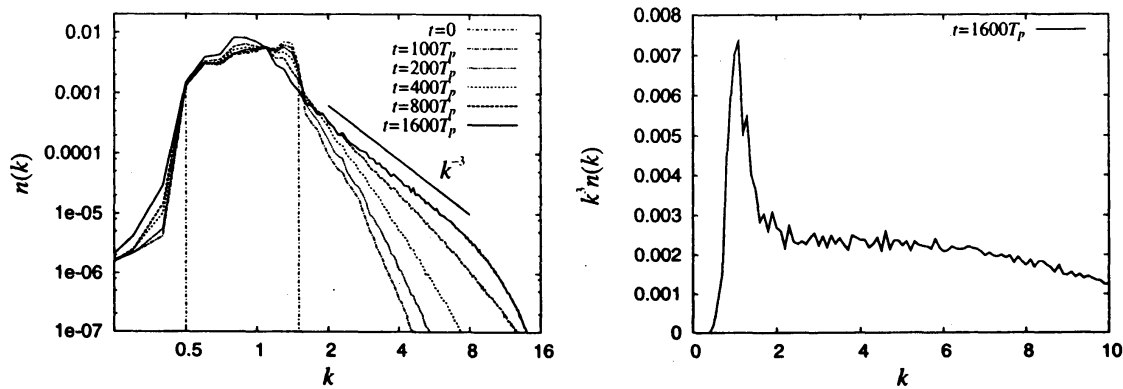


図 1: 左はアクションスペクトルの時間発展. 右は  $t = 1600T_p$  において  $k^3$  で補正したアクションスペクトル.

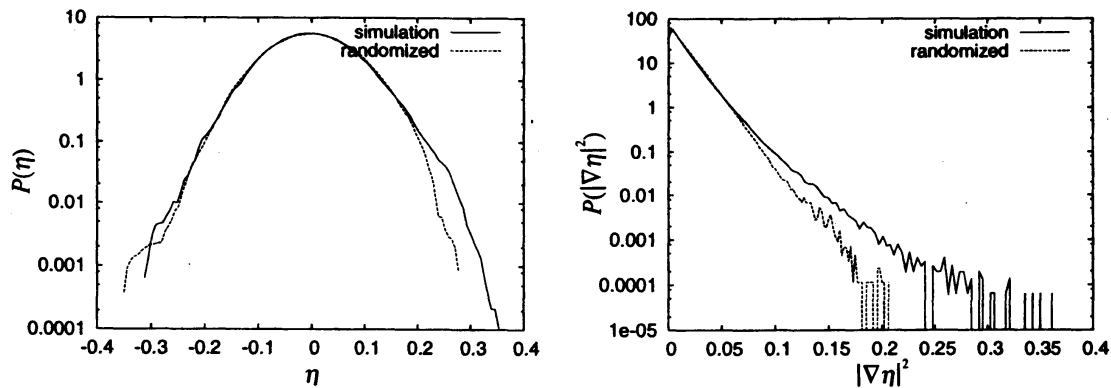


図 2: 左右は, それぞれ, 波面の変位および波面勾配の確率密度関数

則  $n(k) \propto k^{-3}$  によく合っていると考えられる. さらに時間発展を進めると粘性の効果が高波数領域から効き始めるので, スペクトルの傾きは再度急になって来る.

図 2 は  $t = 1650T_p$  での実空間における表面変位  $\eta$  およびその勾配の大きさ  $|\nabla_\perp \eta|$  の確率密度関数を示したものである. 実線は数値計算で得られた波動場のものであり, 破線は数値計算で得られた  $b(\mathbf{k}, t)$  に対して, 絶対値はそのままに, 位相を  $[0, 2\pi]$  の一様乱数で乱雑化したものである. 表面変位, 勾配ともに大部分は乱雑化したものと大差がないようである. しかしながら, 乱雑化したものでは得られないような大きな波形勾配が波動場には存在することがわかる. このことは, 必ずしもスペクトルには現れない重要な物理現象を波動場が持つことを意味する.

図 3 は, 波動場からある 1 ピーク波長分の領域を拡大したものである. この

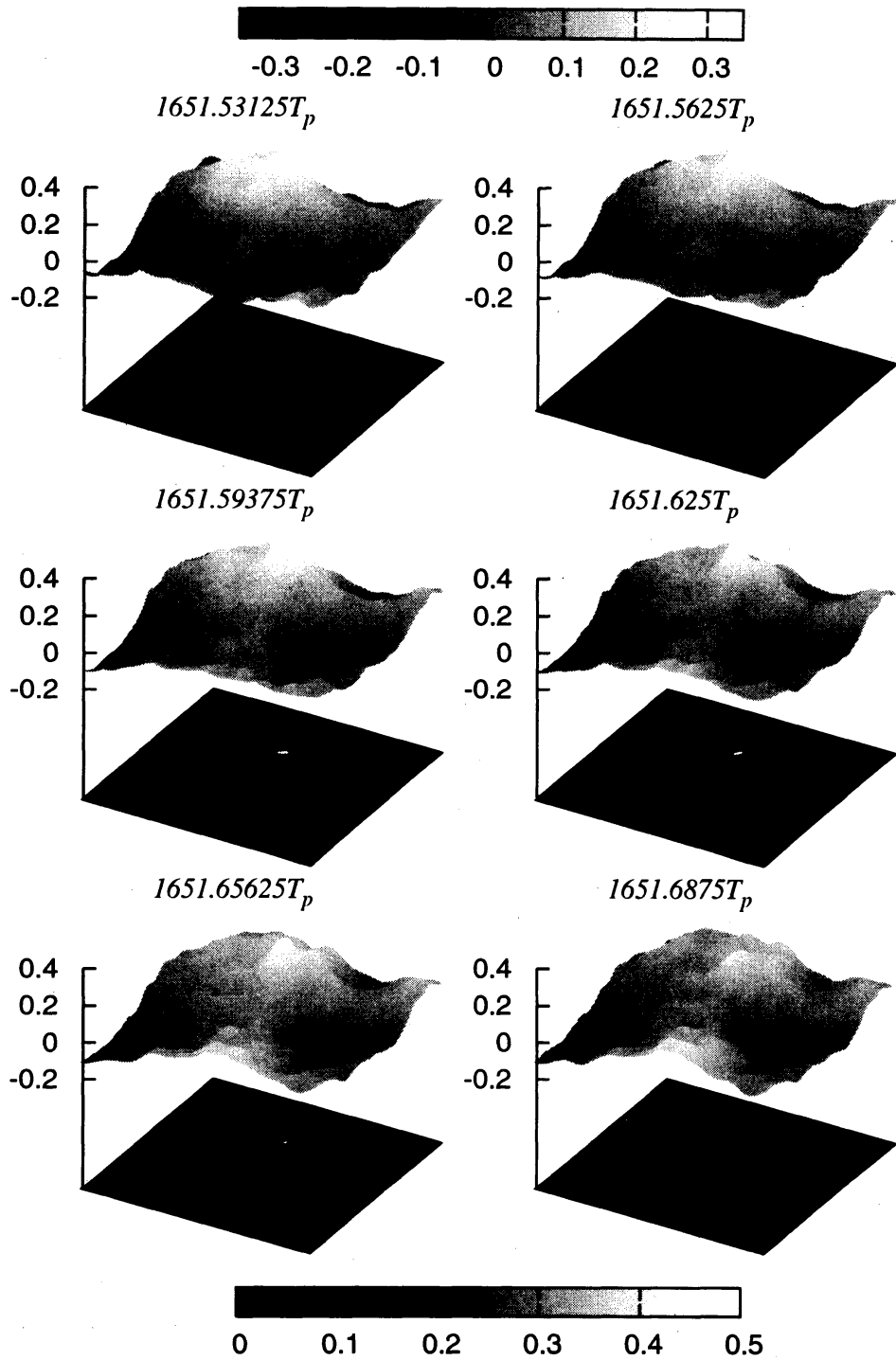


図 3: 特徴的な波面の変位と勾配の時間発展. 波面は 3 次的に上部のカラーバーで色づけ, 勾配は図中底面に下部のカラーバーで色づけてある.

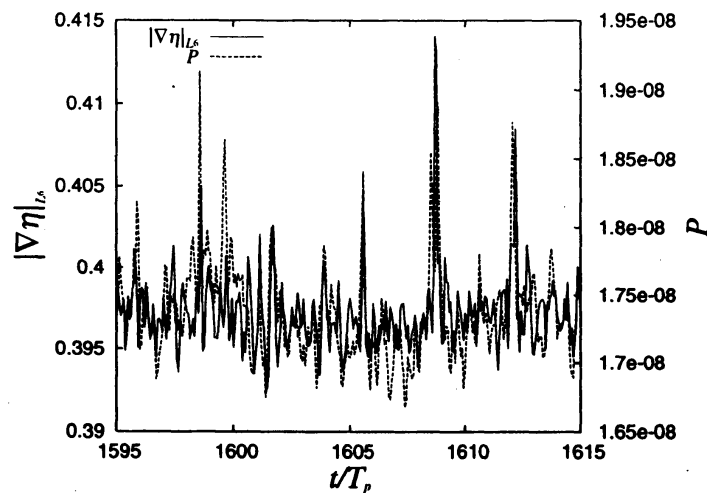


図 4: 波面の勾配とエネルギー散逸率.

ような勾配が大きいものは波動場中にしばしば現れる。もし、人工粘性を課さなければこの間欠性により数値計算は短時間で発散してしまう。数値計算が発散しなくとも勾配が大きいと、(3) 式の仮定に反し水面波の数値計算として (2a-2c) を解くことが正しい計算とは言えなくなってしまうので波形勾配は重要な量である。本研究においては、人工粘性を課していることから勾配が最大でも 0.5 程度と Stokes 波の限界である  $1/\sqrt{3} \sim 0.58$  と比べ小さく、水面波の数値計算として正しい計算がなされていると言ってよい。また、図 4 は、 $S, A_S$  を周期正方形およびその面積とし  $|\nabla_{\perp} \eta|_{L^6} = (\frac{1}{A_S} \int_S dx |\nabla_{\perp} \eta|^6)^{1/6}$  で定義される間欠性を反映する勾配、 $P = -\nu \int dk |k|^{16} \omega(k) |b(k)|^2$  で定義されるエネルギー散逸率の時間変化を示したものである。2 つの量の時間変化はその時間スケールが小さいにもかかわらずよく同期しており、間欠性によって低波数領域から高波数領域へのエネルギーの急激な流れを示唆している。

## 4 まとめと課題

本研究では、等方スペクトルに関して初めて弱乱流理論から期待される冪則が得られた。この結果は、Tanaka によって示されたエネルギーピーク近傍のエネルギーの輸送は Hasselmann 方程式でよく記述されていること [7] とあわせて、スペクトルに関しては弱乱流理論が広い波数領域に渡って成り立つことを表している。

一方で、スペクトルの議論だけではとらえられない間欠性が存在することが得られた。非線形の散逸項を持った非線形 Schrödinger 方程式で解の爆発による間欠性の循環機構が数値的に示されたように [2]、水面波系においても間欠性

がさらに大きくなるパラメータ領域ではその影響が系全体に及ぶことが期待される。今後、本研究よりも大きな数値計算が可能となり、パラメータをうまく見つけることができればそのような興味深い結果が得られると考えている。また、第一原理に基づいた Laplace 方程式を効率的に解くことができればこのような間欠性を定量的に評価することが可能になると思われる。

## 参考文献

- [1] D. Cai and D. W. McLaughlin. Chaotic and turbulent behavior of unstable one-dimensional nonlinear dispersive waves. *J. Math. Phys.*, 41:4125–4153, 2000.
- [2] S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov. Optical turbulence: weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear schrödinger equation. *Physica D*, 57:96–160, 1992.
- [3] V. Krasitskii. On reduced equation in the hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *J. Fluid Mech.*, 272:1–20, 1994.
- [4] A. C. Newell, S. Nazarenko, and L. Biven. Wave turbulence and intermittency. *Physica D*, 152–153:520–550, 2001.
- [5] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio, D. Resio, A. Pushkarev, V. E. Zakharov, and C. Brandini. Freely decaying weak turbulence for sea surface gravity waves. *Phys. Rev. Lett.*, 89:144501–1–144501–4, 2002.
- [6] V. Polnikov. Numerical modelling of flux spectra formation for surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 278:289–296, 1994.
- [7] M. Tanaka. Verification of hasselmann’s energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. *J. Fluid Mech.*, 444:199–221, 2001.
- [8] H. Yuen and B. Lake. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. *Adv. Appl. Mech.*, 22:67–229, 1982.
- [9] V. Zakharov, V. L’vov, and G. Falkovich. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*. Springer-Verlag, 1992.